

技術士一次試験基礎科目 この問題が難しい ヤコビアンを含む二重積分

この問題が急に出されたら、きっと戸惑うのではないだろうか。ヤコビアン？ ということである。ヤコビアンが何者であるかに精通している必要がある。

1-3-2 2次元の領域  $D$  における2重積分  $I$  の変数を  $x, y$  から変数  $u, v$  に変換する。領域  $D$  が領域  $D'$  に変換されるならば、次のようになる。

$$I = \iint_D f(x, y) dx dy = \iint_{D'} f(u, v) J du dv$$

ここで、 $J$  はヤコビアンである。

$$\begin{cases} x = u+v \\ y = uv \end{cases} \text{ と変換したとき、ヤコビアン } J \text{ として正しいものはどれか。}$$

- ① 1
- ②  $u+v$
- ③  $u-v$
- ④  $1+uv$
- ⑤  $1-uv$

この問題はヤコビアンの定義を知っているかどうかで、解けるかが決まります。ヤコビアンは次のように定義されています。det は行列 determinant の略です。

$$J(u, v) \equiv \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \equiv \det \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{bmatrix}$$

このヤコビアンを解くと答が得られます。

$x = u + v$ 、 $y = uv$  ですから、

$$\partial x / \partial u = 1, \partial x / \partial v = 1, \partial y / \partial u = v, \partial y / \partial v = u$$

従って、

$$J(u, v) = u - v$$

となります。