

2020. 5. 16

畑 啓之

技術士一次試験の基礎科目 「解析」の出題より難問を2問 3分で答えを！

「四角形アイソパラメトリック要素」に関する有限要素法からの出題である。なじみのある人には簡単な問題であるかもしれないが、試験会場で初めてこの問題に出会うと、とまどい、そして途方に暮れることは間違いない。救いは解答が記述式ではなく5択であることだ。解答の内のどれかをエイヤーと選ぶとその正解確率は1/5である。

そのような乱暴な議論はともかくとして、平均1問あたり3分の時間制限の中でこの問題を解かなければならない。理屈は難しくないが、時間愛に間違いなく式の展開ができるかがポイントとなる。 $\xi$  (クシー) や  $\eta$  (エータ) などの普段使い慣れていないギリシア文字は計算間違いのもととなるので要注意である。

問題とその解法を示した。

平成28年度

I-3-3  $\xi, \eta$  の関数  $N_1, N_2, N_3, N_4$  を次の式で定義する。

$$N_1 = \frac{1}{4}(1-\xi)(1-\eta), N_2 = \frac{1}{4}(1+\xi)(1-\eta), N_3 = \frac{1}{4}(1+\xi)(1+\eta), N_4 = \frac{1}{4}(1-\xi)(1+\eta)$$

$N_1, N_2, N_3, N_4$  を行ベクトルの和の形式で表すと次の式になる。

$$[N_1 \ N_2 \ N_3 \ N_4] = \mathbf{a}_0 + \xi \mathbf{a}_1 + \eta \mathbf{a}_2 + \xi \eta \mathbf{a}_3$$

ここに  $\mathbf{a}_0, \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$  は定数項からなる行ベクトルであり、行ベクトル  $\mathbf{a}_0$  は

$$\mathbf{a}_0 = \frac{1}{4}[1 \ 1 \ 1 \ 1]$$

となる。行ベクトル  $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$  として正しいものの組合せはどれか。

①  $\mathbf{a}_1 = \frac{1}{4}[-1 \ 1 \ 1 \ -1], \mathbf{a}_2 = \frac{1}{4}[-1 \ -1 \ 1 \ 1], \mathbf{a}_3 = \frac{1}{4}[1 \ 1 \ 1 \ 1]$

②  $\mathbf{a}_1 = \frac{1}{4}[-1 \ 1 \ 1 \ -1], \mathbf{a}_2 = \frac{1}{4}[-1 \ -1 \ 1 \ 1], \mathbf{a}_3 = \frac{1}{4}[1 \ -1 \ 1 \ -1]$

③  $\mathbf{a}_1 = \frac{1}{4}[1 \ 1 \ 1 \ 1], \mathbf{a}_2 = \frac{1}{4}[1 \ 1 \ 1 \ 1], \mathbf{a}_3 = \frac{1}{4}[1 \ 1 \ 1 \ 1]$

④  $\mathbf{a}_1 = \frac{1}{4}[1 \ -1 \ 1 \ -1], \mathbf{a}_2 = \frac{1}{4}[-1 \ -1 \ 1 \ 1], \mathbf{a}_3 = \frac{1}{4}[-1 \ 1 \ 1 \ -1]$

⑤  $\mathbf{a}_1 = \frac{1}{4}[-1 \ -1 \ 1 \ 1], \mathbf{a}_2 = \frac{1}{4}[-1 \ 1 \ 1 \ -1], \mathbf{a}_3 = \frac{1}{4}[1 \ -1 \ 1 \ -1]$

正答： ②

複雑そうに見えるが、実は簡単な問題である。掛算式を展開すれば答えに至る。

なじみが薄いギリシア文字なので  $\xi$  (クシー)  $\rightarrow \alpha$ 、 $\eta$  (エータ)  $\rightarrow \beta$  と書き直す。

題意より、 $\alpha$ 、 $\beta$  の関数  $N_1$ 、 $N_2$ 、 $N_3$ 、 $N_4$  は、

$$N_1 = 1/4(1 - \alpha)(1 - \beta)$$

$$N_2 = 1/4(1 + \alpha)(1 - \beta)$$

$$N_3 = 1/4(1 + \alpha)(1 + \beta)$$

$$N_4 = 1/4(1 - \alpha)(1 + \beta)$$

$$[N_1, N_2, N_3, N_4] = a_0 + \alpha a_1 + \beta a_2 + \alpha \beta a_3$$

$a_0$ 、 $a_1$ 、 $a_2$ 、 $a_3$  は定数項からなる行ベクトル

$$a_0 = 1/4[1, 1, 1, 1]$$

1/4 を省略して表を作る。

	定義より	$a_0$	$\alpha a_1$	$\beta a_2$	$\alpha \beta a_3$
$N_1$	$1 - \alpha - \beta + \alpha \beta$	1	-1	-1	1
$N_2$	$1 + \alpha - \beta - \alpha \beta$	1	1	-1	-1
$N_3$	$1 + \alpha + \beta + \alpha \beta$	1	1	1	1
$N_4$	$1 - \alpha + \beta - \alpha \beta$	1	-1	1	-1

$a_1$ 、 $a_2$ 、 $a_3$  に強いて  $\alpha$ 、 $\beta$ 、 $\alpha \beta$  をつけている

従って、②が答えとなる。

確認計算をする。1/4 を省略すると、

$$\begin{aligned} [N_1, N_2, N_3, N_4] &= [1 - \alpha - \beta + \alpha \beta, 1 + \alpha - \beta - \alpha \beta, 1 + \alpha + \beta + \alpha \beta, 1 - \alpha + \beta - \alpha \beta] \\ &= a_0 + \alpha a_2 + \beta a_3 + \alpha \beta a_4 = [1, 1, 1, 1] + \alpha [-1, 1, 1, -1] + \beta [-1, -1, 1, 1] + \alpha \beta [1, -1, 1, -1] \\ &= [1, 1, 1, 1] + [-\alpha, \alpha, \alpha, -\alpha] + [-\beta, -\beta, \beta, \beta] + [\alpha \beta, -\alpha \beta, \alpha \beta, -\alpha \beta] \end{aligned}$$

さらにダメ押し確認する。

$$=[1-\alpha-\beta+\alpha\beta, 1+\alpha-\beta-\alpha\beta, 1+\alpha+\beta+\alpha\beta, 1-\alpha+\beta-\alpha\beta]$$

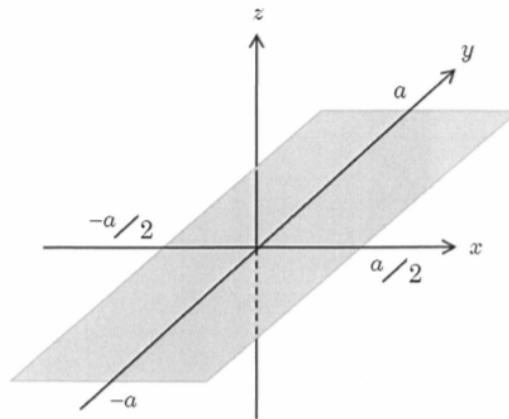
次は慣性モーメントの大きさを問う問題である。板の中心を持ってそれを回転させるとき、 $x$  軸、 $y$  軸、 $z$  軸のどの方向に回転させるのに一番力が必要かという問題である。

複雑に見える問題であるが、思考実験として与えられた厚みのない長方形を頭の中で正方形へと変化させる。そうすると、 $x$  軸回りと  $y$  軸回りの慣性モーメントは等価である。それに対して異質なのが  $z$  軸回りの慣性モーメントである。直感を信じれば正解に至る。

平成27年度

I-3-4 下図のように、均質かつ厚さが一様で薄い長方形の板が、 $xy$  平面内に  $x, y$  軸がそれぞれ辺の中点を通るように置かれている。 $x$  方向の辺の長さを  $a$ 、 $y$  方向の辺の長さを  $2a$  とし、 $x, y, z$  軸の回りの慣性モーメントをそれぞれ  $I_x, I_y, I_z$  とする。 $I_x, I_y, I_z$  のうち最大のものはどれか

- ①  $I_x$  のみ
- ②  $I_y$  のみ
- ③  $I_z$  のみ
- ④  $I_x$  と  $I_y$
- ⑤  $I_x$  と  $I_z$



正答： ③

それぞれの軸を中心に回転させた時のモーメントは、重心点が回転中心からどの程度離れているかで、その大きさの大小関係は直感的に判断できると思います。結局は距離ですから、ピタゴラスの定理、 $z^2 = x^2 + y^2$  に関係することになります。

慣性モーメントの大きさは Wikipedia にあるように、質量×距離<sup>2</sup>である。

慣性モーメント (Wikipedia)

連続体の慣性モーメントは、

$$I = \int_V r^2 dm = \int_V \rho r^2 dV$$

で求められる。r は中心軸からの距離、dm は微小質量、ρ は密度分布である。

$$I_{xx} = I_x = \int (y^2 + z^2) \rho dV, \quad I_{yy} = I_y = \int (x^2 + z^2) \rho dV, \quad I_{zz} = I_z = \int (x^2 + y^2) \rho dV$$

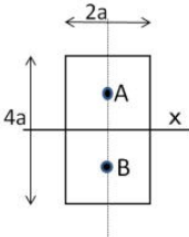
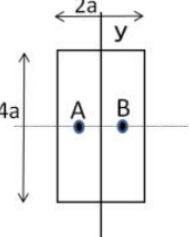
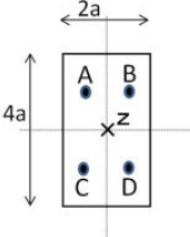
$$I_{xy} = I_{yx} = - \int xy \rho dV, \quad I_{yz} = I_{zy} = - \int yz \rho dV, \quad I_{zx} = I_{xz} = - \int zx \rho dV$$

剛体に対しては、慣性モーメントを質量で正規化して、円板、円筒などの幾何学形状だけで決まる定数式を算出して一覧表としておき、これに質量を乗じて慣性モーメントを算出することが多い。

実際に計算してみると次表のようになり、先のピタゴラスの定理で示された通り

$$\begin{aligned} & x \text{ 軸回りの慣性モーメント} + y \text{ 軸回りの慣性モーメント} \\ & = z \text{ 軸回りの慣性モーメント} \end{aligned}$$

となります。

x 軸の周りに回転	y 軸の周りに回転	z 軸の周りに回転	
			<p><math>I_x</math>は、質点Aと質点Bは共に <math>4 a^2</math> に比例し、x 軸からの距離は <math>a</math> である。今、比例定数を <math>K</math> とすると、  <math>I_x = 2 \times K \times 4 a^2 \times a^2 = 8 K a^4</math></p> <p>同じく、<math>I_y</math>の質点Aと質点Bは共に <math>4 a^2</math> に比例し、x 軸からの距離は <math>a/2</math> である。  <math>I_y = 2 \times K \times 4 a^2 \times (a/2)^2 = 2 K a^4</math></p> <p><math>I_z</math>の質点、A、B、C、Dはすべて <math>2 a^2</math> であり、質点のz軸からの距離は <math>\sqrt{(a/2)^2 + a^2} = \sqrt{5} a/2</math> である。従って、  <math>I_z = 4 \times K \times 2 a^2 \times (\sqrt{5} a/2)^2 = 10 K a^4</math></p> <p>従って、<math>I_x &gt; I_x &gt; I_y</math> であり、<math>I_z = I_x + I_y</math> となっている。</p>