２０２０．５．１０
畑　啓之

久しぶりに数学の不等式について考えてみる　なまっている頭のリフレッシュ！

（１）はＷｅｂからの引用です。一見完全な照明とはなっていないように見えますが、理屈で考えてみるとなるほどです。その理由を含めて以降で示します。

（２）と（３）は視覚的に正しいので、今回は省略です。

技術士一次試験　令和元年度再試験　基礎科目　問題より

**１群　設計・計画に関するもの　（全６問題から３問題を選択解答）**

**Ⅰ－１－１**　次の各文章における$\boxed{\phantom{ア}}$の中の記号として，最も適切なものはどれか。

１）$n$個の非負の実数$a_1, a_2, \cdots, a_n$に関して

$$\sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n}\ \boxed{ア}\ \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n}$$

の関係が成り立つ。

２）$0 < \theta \leqq \pi/2$において

$$\frac{\sin\theta}{\theta}\ \boxed{イ}\ \frac{2}{\pi}$$

の関係が成り立つ。

３）ある実数区間$R$で微分可能な連続関数$f(x)$が定義され，$f(x)$の$x$での２階微分$f''(x)$につき，$f''(x) > 0$であるものとする。このとき実数区間$R$に属する異なる２点$x_1, x_2$について

$$f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right)\ \boxed{ウ}\ \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2}$$

の関係が成り立つ。

| | ア | イ | ウ |
|---|---|---|---|
| ① | ≦ | ＝ | ＝ |
| ② | ≦ | ≧ | ＝ |
| ③ | ＝ | ≦ | ＜ |
| ④ | ＜ | ＝ | ≧ |
| ⑤ | ≦ | ≧ | ＜ |

問題（１）の解法はこちらにあり、ここより以下に引用します。

https://www.geisya.or.jp/~mwm48961/kou2/inequality13.htm

【相加平均≧相乗平均の関係】（２文字の場合）

$a \geqq 0$，$b \geqq 0$ のとき

$$\frac{a+b}{2} \geqq \sqrt{ab}$$

が成り立つ．等号が成立するのは $a=b$ のとき

※高校では，等号付き不等号を≧や≦で表しますが，大学や専門書では ≥, ≤ も使われます．この頁では両方の記号を使いますが，同じ意味です．

（前提）

この定理は右辺に根号があり，$a, b$ が正の数のときだけ（広く取っても０以上のとき）成り立ちます．負の数が混ざっているときは，この定理は使えないことに注意．

（証明）

相加平均≧相乗平均の関係は，大小比較の原則：（左辺）-（右辺）≧０⇒（左辺）≧（右辺）によって証明できますが，いつも大小比較の原則に戻って証明していると長くなるので，相加平均≧相乗平均の関係を定理として覚えて使います．

$$\frac{a+b}{2}-\sqrt{ab}=\frac{a+b-2\sqrt{ab}}{2}=\frac{(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2}{2} \geqq 0$$

等号が成立するのは，$\sqrt{a}-\sqrt{b}=0$ すなわち $a=b$ のとき

ｎ＝２の場合の証明です。

【相加平均≧相乗平均の関係】（３文字以上の場合）

○ $a, b, c \geqq 0$ のとき

$$\frac{a+b+c}{3} \geqq \sqrt[3]{abc}$$

が成り立つ．等号が成立するのは $a=b=c$ のとき

○ $a, b, c, d \geqq 0$ のとき

$$\frac{a+b+c+d}{4} \geqq \sqrt[4]{abcd}$$

が成り立つ．等号が成立するのは $a=b=c=d$ のとき

○５文字以上のときも同様

そこで、更なるミッションです。

ｎ＝３、ｎ＝４の時の証明です。

文字が２個の場合から４個の場合，４個の場合から８個の場合，…は次のように示せる．

$$\frac{\frac{a+b}{2}+\frac{c+d}{2}}{2} \geqq \sqrt{\left(\frac{a+b}{2}\right)\left(\frac{c+d}{2}\right)} = \sqrt{\sqrt{ab}\ \sqrt{cd}}$$

だから

$$\frac{a+b+c+d}{4} \geqq \sqrt[4]{abcd} \quad \cdots(1)$$

ｎ＝４，８，１６，３２・・・の証明です。

次に(1)において

$$d=\frac{a+b+c}{3}$$

とおくと

$$(\text{左辺}) = \frac{a+b+c+\frac{a+b+c}{3}}{4} = \frac{\frac{4(a+b+c)}{3}}{4} = \frac{a+b+c}{3}$$

$$(\text{右辺}) = \sqrt[4]{abc\left(\frac{a+b+c}{3}\right)}$$

となるから，両辺を４乗すると

$$\left(\frac{a+b+c}{3}\right)^4 \geqq abc\,\frac{a+b+c}{3}$$

両辺を $\frac{a+b+c}{3}>0$ で割ると

$$\left(\frac{a+b+c}{3}\right)^3 \geqq abc$$

ゆえに

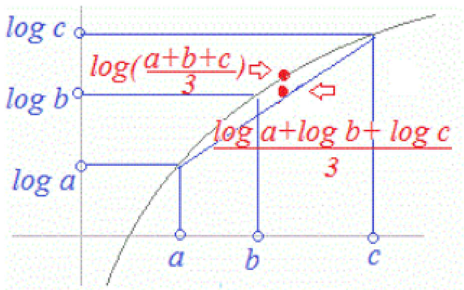
$$\frac{a+b+c}{3} \geqq \sqrt[3]{abc}$$

ｎ＝４を用いてｎ＝３の証明です。

この方法を用いると、ｎからｎ－１の証明が可能になります。

例えば、上で求めたｎ＝１６からスタートすると、ｎ＝１５、ｎ＝１４、ｎ＝１３・・・と証明していくことができます。

さらにもっと一般的にｎ個の文字に対して証明するには，対数関数 $y=\log x$ が上に凸であることを利用するのが簡単ですが，通常不等式の証明の単元を習うときにはまだ対数関数を習っていないため，対数関数が上に凸であることを利用する方法は高３以上の受験向きとなります．




対数関数は上に凸 だから

$$\frac{\log a+\log b+\log c}{3} \leqq \log\left(\frac{a+b+c}{3}\right)$$

⇩

$$\log\left(a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{3}}c^{\frac{1}{3}}\right) \leqq \log\left(\frac{a+b+c}{3}\right)$$

⇩

$$\sqrt[3]{abc} \leqq \frac{a+b+c}{3}$$

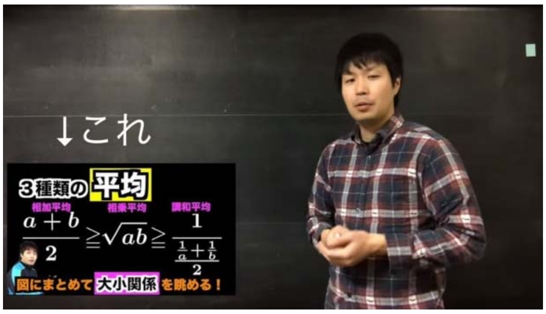
一般的なｎに対してはこの方法で一発証明です。

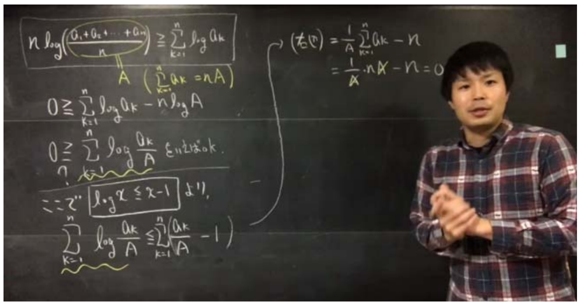
この方法は１ページ目の問題（３）の証明方法と共通するところがあります。

この証明が YouTube に流れていました。

この説明には、調和平均も込みです。

式変形チャネル　n 変数の相加・相乗・調和平均の関係式
　https://www.youtube.com/watch?v=gu7N52vfPwI&t=767s



（２）は原点ゼロ（$\theta = 0$）の時、sin（$\theta$）の傾きは１です。分母の $\theta$ の傾きも１ですから、左辺の値は１となります。（以下省略）