２０２０．３．１８

畑　啓之

技術士一次試験　この三角関数を微分するには時間を要する　簡単な方法はあるか？

本年３月７日に実施された技術士一次試験（再試験）基礎科目の問題です。
とても限られた時間に答えを求めるのは効率的ではないと思える問題なのですが、下に示した以外に、短時間で答えが求まる簡便法はあるでしょうか？

もし、そのような簡便法が存在しないのであれば、この問題に近寄らない選別の目を、受験者が養う必要があるということになります。

- $(\sin x)' = \cos x$
- $(\cos x)' = -\sin x$
- $(\tan x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$

ｓｉｎとｃｏｓの微分を覚えていたとしても、
それ以外の三角関数の微分は応用問題となるでしょう。

たとえば、ｔａｎ。これを試験会場で導出しようとすると
結構な時間が必要となります。

１時間の試験時間内に１５問を解かなければならない技術士一次試験・基礎科目ですので、この問題は当然パス、選問題眼が必要となります。

Ⅰ－３－１　関数 $f(x)$ とその導関数 $f'(x)$ が，次の関係式を満たすとする。

$$f'(x) = 1 + \{f(x)\}^2$$

$f(0)=1$ のとき，$f(x)$ の $x=0$ における２階微分係数 $f''(0)$ と３階微分係数 $f'''(0)$ の組合せとして適切なものはどれか。

① $f''(0)=2$，$f'''(0)=4$
② $f''(0)=2$，$f'''(0)=6$
③ $f''(0)=2$，$f'''(0)=8$
④ $f''(0)=4$，$f'''(0)=12$
⑤ $f''(0)=4$，$f'''(0)=16$

解答(その１)　　これは正攻法です。もっと簡便な解法はないものでしょうか。

$f'(x) = 1 + \{f(x)\}^2$

つまり、

$y' = 1 + y^2 \dashrightarrow \dfrac{dy}{dx} = 1 + y^2$

変形すると

$$\frac{dy}{1+y^2} = dx$$

積分すると

$$\int \frac{dy}{1+y^2} = \mathrm{Arctan}\, y + C_1,\quad \int dx = x + C_2$$

よって

$\mathrm{Arctan}\, y = x + C \dashrightarrow y = \tan(x + C)$

$x=0$ のとき、$y=1$ であると与えられているから、

$C = \frac{1}{4}\pi$、または $\frac{5}{4}\pi$ である。

1階微分（1次微分）

$y' = \sec^2(x + C)$ ---- $C = \frac{\pi}{4}$、または $\frac{5}{4}\pi$

2階微分（2次微分）

$$y'' = 2 \times \frac{\sin(x+C)}{\cos^3(x+C)}$$

$x=0$ のとき、$y''=4$ ---- $C=\frac{\pi}{4}$ のときも、$\frac{5}{4}\pi$ のときも

従って、この段階で答は④か⑤である。

3階微分（3次微分）

$Y = AB^3$ のとき、$\dfrac{dY}{dx} = \dfrac{dA}{dx} \times B^3 + 3 \times AB^2 \times \dfrac{dB}{dx}$

$$y''' = 2\frac{d}{dx}\left(\frac{\sin(x+C)}{\cos^3(x+C)}\right)$$

$$= 2\left(\frac{d}{dx}\sin(x+C)\right) \times \frac{1}{\cos^3(x+C)} + 2 \times 3 \times \frac{\sin(x+C)}{\cos^2(x+C)} \times \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{\cos(x+C)}\right)$$

$T = \cos(x+C)$ とおくと $\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{1}{\cos(x+C)}\right) = \dfrac{dT}{dx}\dfrac{d}{dT}\left(\dfrac{1}{T}\right)$

$$= \frac{2}{\cos^2(x+C)} + 6 \times \frac{\sin^2(x+C)}{\cos^4(x+C)}$$

$x=0$ のとき、$y''=4+12=16$ ---- $C=\frac{\pi}{4}$, $\frac{5}{4}\pi$ の双方ともに、

従って、答は⑤となる。