２０１９．５．２８
畑　啓之

ニュートンの「自然哲学の数学的諸原理（プリンキピア)」に目を通して

アイザック・ニュートンが数学的手法、特に微積分学への端緒を得たのは 1665 年である。同じ 1665 年に万有引力の法則を発見している。

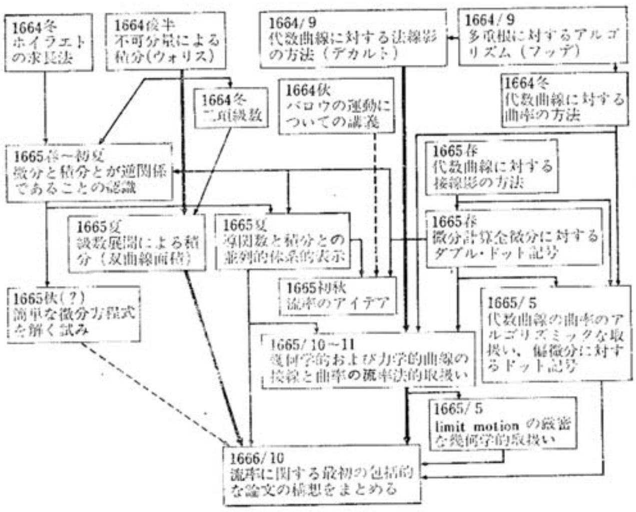


表　2

万有引力の発見時にニュートンが思い悩んだのは、地球と地上の物体間に働く引力を考えた時、地球と物体間の距離を、地球の中心からその物体の中心までの距離としてもよいか？であった。

その後、この万有引力の法則は、宇宙にもその適用範囲を広げることになる。地球と月、あるいは、太陽と惑星、太陽と彗星、木星とその衛星との間に働く引力などに、さらにケプラーの法則などにも多くの考察を加えている。そして、その考察結果は、ニュートン著プリンキピア（1686 年）にまとめられている。

プリンキピアにはそれらの解説に多くのページが当てられているが、いずれも幾何学を駆使した手法である。たしかに、古代ギリシャの流れをくむ学問が花開いていた中世においては幾何学が数学の中心を占めていたので、そのようになるのは当然であるかもしれないが、微分積分学という代数学への扉を開いたニュートンでさえも、代数学の手法を用いていないのには驚きであった。

本ブログの引用元は、「世界の名著 26　ニュートン（河辺六男、1971 年）および「プリンキピアを読む（和田純夫、2009 年）である。世界の名著（プリンピキア）には 200 強の幾何学図が収められている。

書籍より、地球と物体の間に生じる引力を計算する際の距離についての項目を以下に引用した。

プリンキピアの序文および目次
（「世界の名著 26」より）

幾何学が重要とある

読者への著者の序文（第一版序文）

古代の人々は（パッポスがその一例ですが）自然の事物の研究に機械の学問（力学）をいちばん特別に扱い、またより近い時代の人たちは、実体形相と超自然性とを排して、自然現象を数学的法則に帰着させようと試みました。ですからこの論述では、数学の、それが哲学に関係するかぎり、発展に努めることが適切であると思われました。実際古代の人々は力学を二通りの形で扱いました。証明によって厳密に進める理論的な力学と実用的な力学とでです。あらゆる手工芸は実用的な力学に関係し、そこから機械学の名が与えられました。しかし職人たちは精度の低い仕事をするのが常ですから、機械的なものはすべて幾何学から区別されて、精確なものはなんでも幾何学に属するとされ、精度の落ちるものはすべて力学に属するとされるようになりました。けれども誤差は技芸のものではなく、職人たちのものです。低い精度の仕事をする者は不完全な機械師です。もしまったく精確に仕事ができるなら、その職人は完璧な機械師と申せましょう。なぜかと申しますと、直線や円を描くということは、それに幾何学はもとづいているのですが、力学に属することだからです。幾何学はそれらの線を描くことを教えるものではなく、要請するものです。幾何学は、その敷居をまたぐ前にまず直線や円を正確に描くことが教えられてあることを求め、次にそういった操作によってどのように問題が解かれるかを告げるものだからです。直線や円を描くことは問題ではありますが、幾何学の問題ではありません。この問題を解くことは力学に求められ、幾何学ではその解の使い方が教えられるのです。そして外部よりもたらされたこのように少数の原理から、かくも多くの帰結が産みだされるということこそ、幾何学が誇りとするところです。ですから幾何学は力学的実践に拠るものであり、力学全般の中で測量術を精確に提示し証明する一分野以外のなにものでもありません。手工芸はもっぱら物体を動かすさいに使われるものですから、幾何学が（物体の）大きさに関するものであるように、力学は通常（物体の）運動に関するところとなるのです。この意味で理論力学は、どのような力にせよそれから結果する運動の学問、またどのような運動にしろそれを生ずるに必要な力の学問で、それを精確に提示し証明するものであるといえましょう。力学のこの部分は、古代の人々によって手仕事に関係する五つの力[1]について培われたところですが、彼らは重力（手先の力ではない）を、重量をもつ物体がそれらの力で運動している場合以外では考えませんでした。しかしわたくしたちは、応用技芸よりも原理的諸問題に留意し、手先の力についてではなく自然界に存在する力について書き、重さ、軽さ、弾力、流体の抵抗、その他同種の力に、引きよせるものでも押しやるものでも、関係することがらをもっぱら取り扱います。そういうわけでこの著作を哲学の数学的諸原理として提出いたします。哲学における困難はすべて次の点にあると思われるからです、さまざまな運動の現象から自然界のいろいろな力を研究すること、そして次にそれらの力から他の現象を説明論証すること。それには第一篇および第二篇において扱われた一般的な諸命題が関係しています。そして第三篇ではそのことの実例を、世界体系（宇宙系）の解明において与えました。すなわちそこでは天体現象から、前二篇で数学的に説明された諸命題によって、物体を太陽や各惑星に向かわせる重力が、導きだされます。次にそれらの力から、他の諸命題、それもまた数学的なものですが、によって、惑星や彗星や月や海の運動が導かれます。わたくしは他の自然現象も、力学の諸原理から同種の議論によって導くことが許されるのではないかという希望を抱いています。と申しますのは、多くのことから、それらの現象もすべてある力に依存するはずのものではないのか、その力によって物体の微小部分はまだ知られていない原因で、あるいはたがいに相手方に押しやられて規則正しい形に凝集したり、あるいはたがいに反発し斥けあったりするのではないか、そのような力がまだ知られていないために、哲学者たちはこれまでむなしく自然を追求してきたのではないか、と想像させられるからです。そしてここに提出された諸原理が、あるいはこの哲学する方法について、あるいはより真実に近い何かに対して、なんらかの光明を与えることを望むものです。

この出版にあたっては、きわめて明敏な、あらゆる種類の文献に通暁されているエドマンド・ハリー氏が熱心に仕事を進められ、誤植を正し図表の準備に留意されたばかりでなく、もともと本書の公刊を企て進められたのは氏であったのでした。と申しますのは、天体の軌道の形の証明をわたくしより入手されてから、氏はたえずそれを王立協会に伝えるように求められ、後にこの協会の方々のご懇篤なおはげましとお求めによってそれに日の目を見させる気になったからです。しかしその後、月の運動の不等性にとりかかり、ついで別のいくつかのことがら、重力やその他の力の従う法則や測定とか、また与えられた法則に従って引かれる物体が描く図形とか、数個の物体のそれら相互間での運動とか、抵抗のある媒質中における諸物体の運動とか、媒質の力、密度、および運動とか、彗星の運動などといったようなことに立ち入ることになり、それらを完全に調べあげ、いっしょに発表するために、出版を他の時期までのばすことにいたしました。月の運動に関することがらは（不完全ではありますが）、命題66の系にすべてひとまとめにしました。そこに含まれているいくつかのことがらを、その問題にふさわしくない冗長な仕方で提出したり、別々に証明したりせざるをえなくなるとか、またその他の命題の系列を中断したりすることを避けるためにです。その後に見いだしましたいくつかのことがらは、命題や引用の番号を変えるよりも、あまり適当とは思われない場所へでも挿入してしまうというゆき方をとりました。本書のすべてを寛容をもって読まれますことを、またこのように困難な題材において、それらの欠陥をとがめだてるというのではなく、むしろ読者方の新しいご努力でもって検討され、優しく補われますことを、心から願うものです。

一六八六年五月八日[1]

ケンブリッジ、トリニティ・カレッジにて

アイザック・ニュートン

（1）ギリシア神話における海の擬人神。
（2）モーゼがエホバよりシナイ山で授けられた十戒を彫った二枚の石板。『出エジプト記』二〇・一以下。「世界の名著」12『聖書』参照。
（3）ローマの古い[illegible]の女神。
（4）カメーナたちはギリシアのムーサイ（ミューズ）と同一視されているローマの水のニンフ。
（5）アレクサンドレイアのパッポス（三世紀後半）はギリシア数学の全成果を包括する『集成』συναγωγή を編したが、その第八巻は機械学に当てられている。

（1）五つの単一機械、すなわち輪軸、てこ、滑車、くさび、螺旋のことをいうのであろう（アルキメデスによる『集成』の復原版、1114. 22-1124. 4．M・R・コーエン、I・E・ドラブキン編 *A Source Book in Greek Science*, 224-227）。

目次

「プリンキピアを読む」より

万有引力における地球と物体間の距離について

命題 71 ［球面外部の重力］

前の命題と同じだが，点Pが球面の外部にあるとすると，点Pにある物体は，球の中心に向かう，球の中心からの距離の2乗に反比例する力を受ける。

解説 図 11－3のような2つの配置を考える。円で描かれて

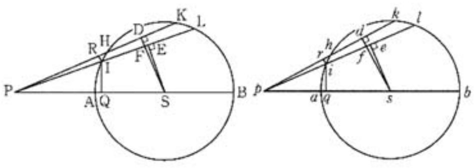


図 11－3　球の外部の質点が受ける重力の比較

いるのは，この問題で与えられている球の断面であり，Sおよび s は球の中心である。球の大きさは同じだが SP と sp は異なる。点Pにある物体と点 p にある物体に働く力の比が，比 $\frac{\mathrm{PS}}{ps}$ の2乗に反比例することを示そう。

まず2つの図の関係を説明しておこう。点Pと点 p からそれぞれ IL = il，HK = hk となるように直線を引く。また SD，SE，IQ，IR，およびそれに対応する右の図の線はすべて，S(s) または I(i) からの垂線である。そして弧 IH を軸 AB のまわりに1周させた部分（円環）と，弧 ih を軸 ab のまわりに1周させた部分が，Pおよび p それぞれをS方向，s 方向に引く力の比は，$\frac{\mathrm{PS}}{ps}$ のマイナス2乗であることを証明する。KL と kl に関しても同様の性質を証明する。2つの球面のすべての部分を同じように対応させることができるので，これらが証明できれば命題自体が証明できたことになる。

IH 部分と ih 部分の比較は，次のような（曲芸的）手順で行う。

1．まず準備として，DS = ds，ES = es なのだから（弦の長さが等しければ弦から中心までの距離も等しい），$\frac{\mathrm{DF}}{df} = 1$ である（∠DPE，∠dpe が0になった極限でこの比が1になるという意味。この極限でEとF，あるいは e と f は重なるから）。

2．HK = hk なので，それらとHや h での接線がなす角度（∠RHI と ∠rhi）は等しい。したがって△IRH と△irh は相似であり，$\frac{\mathrm{RI}}{\mathrm{IH}} = \frac{ri}{ih}$ である。

3．$\frac{\mathrm{PI}}{\mathrm{PF}} = \frac{\mathrm{RI}}{\mathrm{DF}}$，$\frac{pi}{pf} = \frac{ri}{df}$（△PIR ∽ △PFD，△$pir$ ∽ △pfd より）から，1も使って $\frac{\mathrm{PI}}{\mathrm{PF}\cdot\mathrm{RI}} = \frac{pi}{pf\cdot ri}$

すなわち（2を使って），

$$\frac{\mathrm{PI}}{\mathrm{PF}\cdot\mathrm{IH}} = \frac{pi}{pf\cdot ih}$$

4．$\frac{\mathrm{PI}}{\mathrm{PS}} = \frac{\mathrm{IQ}}{\mathrm{SE}}$，$\frac{pi}{ps} = \frac{iq}{se}$（△PQI ∽ △PES，△$pqi$ ∽ △pes より）から，1も使って，

$$\frac{\mathrm{PI}}{\mathrm{PS}\cdot\mathrm{IQ}} = \frac{pi}{ps\cdot iq}$$

5．ここでPが，IH を軸 AB のまわりに1周させた部分（円環）から受ける力を考えよう。それは円環の [illegible]

として，

$$(\mathrm{IH}\cdot\mathrm{IQ})\cdot\left(\frac{1}{\mathrm{PI}^2}\right)\cdot\left(\frac{\mathrm{PF}}{\mathrm{PS}}\right)$$

$$= \frac{\left(\frac{\mathrm{PF}\cdot\mathrm{IH}}{\mathrm{PI}}\right)\cdot\left(\frac{\mathrm{PS}\cdot\mathrm{IQ}}{\mathrm{PI}}\right)}{\mathrm{PS}^2}$$

に比例する。ただし右辺は，3と4の結果を使えるように組み合わせた。p についても同じ式が成り立つが，右辺の最初の括弧内，および2番目の括弧内は，3と4から等しいことがわかる。したがってPおよび p が円環部分から受ける力の比は，中心 S(s) までの距離の比 $\left(\frac{\mathrm{PS}}{ps}\right)$ の2乗に反比例することが証明された。

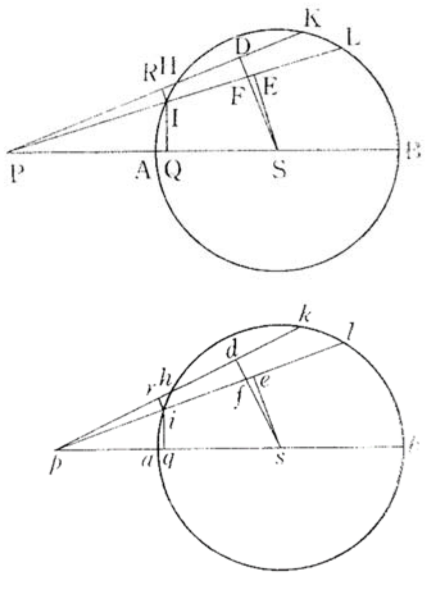
KL と kl についても同様である。（終）

同じく「世界の名著」中のプリンキピアより

万有引力における地球と物体間の距離について

命題71・定理31 前命題と同じことを仮定すると、球面の外側に置かれた微小物体は球の中心に向かって、同じこの中心からの距離の2乗に逆比例する力でもって引かれることがいえる。

AHKB，ahkbは中心S，s，直径AB，abで描かれた二つの相等しい球面とし、P，pはこれらの直径でつくられた球面の外側に位置する二つの微小物体とせよ（第109図）。それらの微小物体から直線PHK，PIL，phk，pilをひいて、大円AHB，ahbから相等しい弧HK，hkおよびIL，ilを切りとらせ、またこれらの直線に垂線SD，sd，SE，se，IR，irをおろし、それらのうちSD，sdはPL，plをFおよびfにおいて切るとし、また各直径に垂線IQ，iqをおろすとせよ。角DPE，dpeを零にしてゆくとせよ、するとDSとds、ESとesは相等しいから、直線PE，PFおよびpe，pf、また微小線分DF，dfはそれぞれ相等しくとることができる。なぜなら角DPE，dpeがともに零になるとき、それらの最後の比は、1だからである。以上のことから、PI対PFはRI対DF，pf対piはdfまたはDF対ri、相等しい項の相殺よりPI×pf対PF×piはRI対riとなろう。この比は〔補助定理7系3によって〕弧IH対弧ihに等しい。一方PI対PSはIQ対SE，ps対piはseまたはSE対iq、相等しい項の相殺よりPI×ps対PS×piはIQ対iq。前の結果の比との積をとって、PI^2×pf×ps対pi^2×PF×PSはIH×IQ対ih×iq、すなわち、半円AKBを直径ABのまわりに回転させるときに弧IHが描く球帯が、半円akbを直径abのまわりに回転させるとき弧ihが描く球帯に対する比、に等しい。そしてこれらの球帯が微小物体Pおよびpを各球帯に向かう直線の方向に引く力は、〔仮定によって〕球帯自体に正比例し、球帯の微小物体からの距離の2乗に逆比例する、すなわち、pf×ps対PF×PSの比にある。またそれらの力が、〔法則の系Ⅱにより力の分解を行なって〕直線PS，psに沿って中心に向かう斜めの成分に対する比は、そ



第109図

れぞれPI対PQ，pi対pqに、すなわち〔相似三角形PIQとPSF．piqとpsfから〕PS対PF，ps対pfに等しい。これより、相等しい項の相殺から、この微小物体PのSに向かう引力が、微小物体pのsに向かう引力に対する比は、PF×pf×ps/PS対pf×PF×PS/psに、すなわち、ps^2対PS^2となろう。同様な議論によって、弧KL，klの回転によって描かれる球帯がこれらの微小物体を引く力の比も、ps^2対PS^2になるであろう。よって常にsdをSDに、seをSEに等しくとることによって両球面から分割されうる各球帯の力の比はすべて同じ比になろう。そこで、それらを加え合わせれば両全球面が球面の外部にある各微小物体に及ぼす力も同じ比にあるであろう。証明終り。