２０２０．５．２０
畑　啓之

技術士一次試験　基礎科目　ベクトルの内積に関する問題　３分で解ける？

次の問題を解いてみた。問題文は短いが中身は濃いといったところだ。実際の試験では、この問題を３分で解けなければならない。何とハードなことか。

令和２年　技術士一次試験（再試験）　基礎科目

Ｉ－３－２　定点から垂直に降ろされる平面上の点

Ⅰ－３－２　座標(x, y, z)で表される３次元直交座標系に，点Ａ$(6, 5, 4)$及び平面Ｓ：$x+2y-z=0$がある。点Ａを通り平面Ｓに垂直な直線と平面Ｓとの交点Ｂの座標はどれか。

①　(1, 1, 3)　　②　(4, 1, 6)　　③　(3, 2, 7)　　④　(2, 1, 4)　　⑤　(5, 3, 5)

正答：②

問題文は短いのだが・・・・

（解答、その１）

定理に従ってこの問題を解く。

定理

平面上の点Ｂ（a,b,c）を通り、ベクトル q=(q1,q2,q3)に垂直な平面の方程式は
q1(x-a)+q2(y-b)+q3(z-c)=0
である。

解答候補の平面Ｓ上の点Ｂと、空間上の点Ａよりベクトル q を求める。

選　択　肢	①	②	③	④	⑤
空間上の点 A 座標	6　5　4	6　5　4	6　5　4	6　5　4	6　5　4
平面上の点 B 候補	1　1　3	4　1　6	3　2　7	2　1　4	5　3　5
ベクトル　q	5　4　1	2　4　−2	3　3　−3	4　4　0	1　2　−1

問題文で与えられた平面 S の方程式は、 x ＋２ y － z ＝０　であるから、ベクトル q は②の（2,4,-2）か⑤の(1,2,-1)のどちらかが答えの候補である。しかしながら、⑤の平面上の点とされる（5,3,5)は平面上にはないことから、⑤は候補から外れる。従って、答えは②ということになる。

検算すると、　2(x-4)＋4(y-1)-2(z-6)　＝　2(x+2y-z)+(-8-4+12)　＝　2(x+2y-z)　＝　0

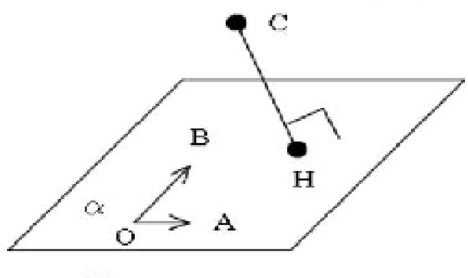
従って、②が答えとなる。

（解答、その２）

参考となる解法を Web で探し、次いでその方法で本出題の問題を解いた。

参考とした情報　空間ベクトルで点から下した垂線と平面との交点を求める方法（以下にその解法を引用した）

問題の条件を書き出して行きましょう。



「平面　α　に点Ｃから垂線を下ろす」ということは、

点Ｃは平面　α　上にはない、ということです。

垂線の方向ベクトルは平面の法線ベクトルと平行です。

平面の法線ベクトルと方程式を求めることはできますが、

平面　α　を　$\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}$　を基底ベクトルとして媒介変数表示しましょう。

垂線と平面　α　との交点をHとすると、点Oは原点なので、

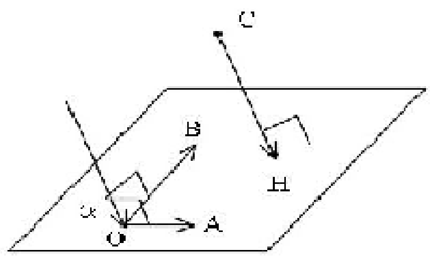
$$\begin{aligned}\overrightarrow{OH} &= s\overrightarrow{OA} + t\overrightarrow{OB} \\ &= s(1,0,0) + t(1,1,1) \\ &= (s+t, t, t)\end{aligned}$$

と表すことができます。

これよりベクトル　$\overrightarrow{CH}$　は、

$$\begin{aligned}\overrightarrow{CH} &= \overrightarrow{OH} - \overrightarrow{OC} \\ &= (s+t, t, t) - (2, 3, 2) \\ &= (s+t-2, t-3, t-2)\end{aligned}$$

となり、このベクトルは平面の法線ベクトルのひとつであり、平面に垂直です。



平面に垂直ということは、

「平面上にあるすべてのベクトルと垂直」

ということなので、

$\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}$　とも垂直ということ。

（　$\overrightarrow{AB}$　とも垂直ですが、文字が２つだから上の２つだけで良いです。）

よって、内積が０になることから、

$$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{CH} = 0 \quad かつ \quad \overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{CH} = 0 \quad \cdots①$$

より、（この連立方程式は自分で！）

$$s = -\frac{1}{2}, t = \frac{5}{2}$$

$$\overrightarrow{OH} = (s+t\,,\,t\,,\,t)$$
$$= \left(-\frac{1}{2}+\frac{5}{2}\ \ ,\ \ \frac{5}{2}\ \ ,\ \ \frac{5}{2}\right)$$
$$= \left(2\ \ ,\ \ \frac{5}{2}\ \ ,\ \ \frac{5}{2}\right)$$

ここからが本問題の解法である。問題文に与えられている点 A は上の例題と合わせるために点 C とした、

平面 S:x+2y-z=0 上の点を、例題を参考に 3 点選んだ。O(0,0,0)、A(1,0,1)、B(0,1,2)である。
※　点 O、A、B の座標は平面 S の式を満足しさえすれば任意に選ぶことができる。

点 H が求める平面 S 上の点であるとする。
　OH= s OA+ t OB=s(1,0,1)+t(0,1,2)=(s,t,s+2t)
　CH=OH-OC=(s,t,s+2t)-(6,5,4)=(s-6,t-5,s+2t-4)
ベクトルの直交より内積=0 を計算する。
OA・CH=0
　(1,0,1)(s-6,t-5,s+2t-4)=2s+2t-10=0
OB・CH=0
　(0,1,2)(s-6,t-5,s+2t-4)=2s+5t-13=0
この両式より
　s=4,t=1
従って、求める平面上の点 H の座標は、原点 O から見て
　OH=(4,1,6)　となり、答えは②である。

問題文は短いですが、これを 3 分で解ける自信がありますか？