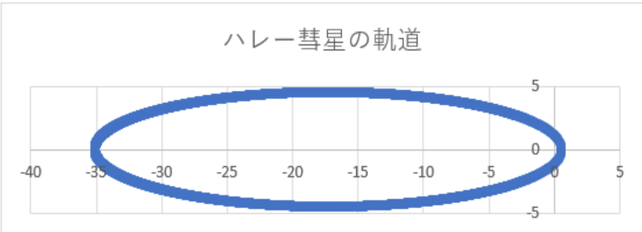
２０１９．７．２４
畑　啓之

ニュートン著「プリンキピア」に従ってハレー彗星の軌道を計算する

ニュートンは幾何学を駆使して惑星の軌道が楕円であることを証明した。その中の、ケプラーの第２法則（面積速度一定）の証明方法を次ページに示した。
この証明方法に従って、BASIC でプログラムを組み、シミュレーションを行った。得られた結果を下の図に示した。この図の x 軸、y 軸の単位は天文単位（au）で、太陽と地球の距離、約 1 億 5000 万 km が 1 au である。
図の原点が太陽であり、右端（x 軸上）に置いた天体（ハレー彗星）に y 軸方向の初速度を与え、その軌道を確認した。x 軸上の初期値は 0.586au、y 軸方向の初期速度は 54582m/秒で、x 軸 -35.08au に到達する、一周 75.3 年の楕円軌道が描けた。この楕円の離心率は 0.967 であり、これらのデータはすべてデータブックの値と一致している。勿論、ケプラーの第２法則（面積速度一定）も満たしている。
初速度を３m だけ速くしただけで、下表に示すように太陽からの距離が 0.750au（１億 1250 万 km）も遠くなるとはビックリであった。軌道上の任意の位置での、位置のエネルギー＋運動のエネルギー＝一定を確認してあるので、このデータに間違いはない。



ハレー彗星の軌道シミュレーション

初速度	長半径a	短半径 b	周期 年	ケプラー 3	離心率
39000	0.589	0.589	0.451	0.998	0.041
45000	0.884	0.832	0.831	1.000	0.338
50000	1.678	1.274	2.173	1.000	0.651
53000	4.035	2.095	8.102	1.000	0.855
54000	7.856	2.978	22.015	1.000	0.925
54500	15.113	4.170	58.755	1.000	0.961
54580	17.754	4.526	74.796	1.000	0.967
54582	17.832	4.536	75.288	1.000	0.967
54585	17.950	4.552	76.038	1.000	0.967
54600	18.533	4.630	79.979	1.005	0.968
54700	24.069	5.282	118.066	1.000	0.976

ケプラー３は、ケプラーの第３法則で、公転周期^2／長半径＾3

プリンキピアを読む　和田純夫　ブルーバックス　２００９年
ニュートンはいかにして「万有引力」を証明したのか？

> **ケプラーの第2法則** 惑星と太陽を結ぶ線分が単位時間に描く面積は，一定である。

もし惑星の軌道が完全な円だったら，この法則は単に，惑星が等速で動いているという意味にすぎない。しかし実際は円ではなく楕円であり，太陽と惑星の距離はたえず変化している。面積が一定であるためには，遠方にいるとき，惑星が一定時間に動く弧は短く（つまり速度が小さく），近くにいるときはその弧は長く（つまり速度が大きく）なければならない。しかしなぜそのようになるのだろうか。その理由にニュートンは気づいた。惑星がある固定された1点から引っ張られて動いているとすれば，その軌道がいかにゆがんでいても，面積速度は必ず一定にならなければならないのである。命題1はこのことの証明である。

証明を紹介する前に，その手法について注意しておく。この証明では，力は常に働いているのではなく，一定の時間間隔で瞬間的かつ断続的に働くと仮定される。つまり，瞬間的な，ただし無限の大きさをもつ仮想上の力を考え，その時間間隔の間ずっと働いていたはずの実際の有限な大きさの力と同一の影響をもたらすとする。このような力を現代の物理では「撃力」と呼んでおり，解説でもその用語を使う。厳密には，撃力が働く時間間隔をゼロにする極限を考えて証明が完結する。

命題1 ［力が向心力ならば面積速度が一定であること］
公転する物体（たとえば惑星）が，ある固定した1点（力の中心と呼ぶ）に引かれて運動している場合，その物体と力の中心を結んだ線分が描く面積は時間に比例する（面積が時間に比例するということは面積速度が一定であることにほかならない，図6-1）。

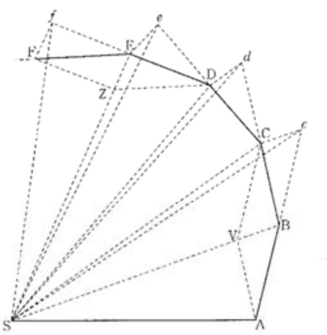


図6-1
物体はSから力を受けながらA→B→C→…と動く。
面積速度一定とは，△SAB＝△SBC＝△SCD＝…

解説 まず，力の源である固定した点（力の中心）をSとする。ある時刻でこの物体はAに位置しB方向に進んでいるとする。そしてある時間間隔の後にBに到達し，そこでSから撃力を受けて，（それまでの速度に加えて）S方向の速度ももつとする。

最初と同じ時間間隔の間に，この物体がどの位置にまで進むかを考えよう。もしBで撃力を受けなければ，この物体はまっすぐ進んで，ABと同じ長さのcまで進む（運動の第1法則）。しかしBでS方向の撃力を受けたので，BS方向の速度ももつ（運動の第2法則）。この時間間隔での撃力の影響（BS方向）がBVだとすれば，最終位置はBcとBVを平行四辺形で合成してCと求まる。

面積速度が一定であることを証明するには，△SABと△SBCの面積が等しいことをいえばよい。この2つの三角形を直接ではなく，△SBcを仲介として間接的に比較する。まず，△SABと△SBcは底辺の長さが等しく（AB＝Bc），頂点つまり高さは共通だから面積も等しい。また，△SBcと△SBCは，底辺（SB）が共通で高さが等しい（SBとCcが平行だから）のでやはり面積が等しい。結局，△SABと△SBCの面積が等しいという，求めるべき結果が求まった。

この議論を繰り返せば，撃力により次々とできる三角形（図の△SCD，△SDEなど）の面積がすべて等しいことが求まり，三角形を無限に細くした極限として，力が連続的に働く場合にも面積速度が一定であることが求まる。（終）

この定理は現代の物理学では「角運動量の保存則」と呼ばれている（角運動量とは，面積速度に質量の2倍を掛けた量）。フィギュア・スケーターがスピンしているとき，伸ばしている手を縮めると回転が速くなるが，これも上記の定理と基本的に同じ原理である。手を縮めるとは，惑星が太陽に近づくことに対応するので，面積速度が変わらないために

は，回転が速くならなければならない。

常にある1点から働いている力を向心力と呼ぶ。向心力の影響下で運動している物体は常に面積速度（角運動量）が一定であるというのが命題1であった。この命題に関係した性質がいくつかあげられているが，あとで引用されるものだけを記しておく。